

האוניברסיטה העברית בירושלים

סילבוס

בעיות פתוחות במתמטיקה - 80530

תאריך עדכון אחרון 27-04-2024

נקודות זכות באוניברסיטה העברית: 3

תואר: בוגר

היחידה האקדמית שאחראית על הקורס: מתמטיקה

השנה הראשונה בתואר בה ניתן ללמוד את הקורס: 0

סמסטר: סמסטר ב'

שפת ההוראה: אנגלית

קמפוס: קרית א"י ספרא

מורה אחראי על הקורס (רכז): אילון לינדנשטראוס

דוא"ל של המורה האחראי על הקורס: elon.bl@mail.huji.ac.il

שעות קבלה של רכז הקורס: בתיאום מראש

מורי הקורס:

תאור כללי של הקורס:

הקורס יתאר שלוש בעיות פתוחות מפורסמות במתמטיקה, כולל רקע וכמה תוצאות בולטות הקשורות להשארה.

הקורס ינתן באנגלית

בעיות לדוגמא שיתכן וידונו בשיעור:

השערת רימן
השערת ליטלוד בקירוב דיפנטי
השערת קאקיה

מטרות הקורס:

מטרת הקורס להציג 2-3 בעיות פתוחות מפורסמות ברמה שנגישה לתלמידי תואר ראשון. תוך כדי יוצגו מושגים חשובים במתמטיקה מודרנית

תוצרי למידה

בסיומו של קורס זה, סטודנטים יהיו מסוגלים:

בסיום הקורס תלמידים יכירו שלוש בעיות פתוחות מפורסמות. התלמידים יוצגו בפני נושאי מחקר עכשוויים ויבינו יותר טוב מהו מחקר מתמטי. כמו כן התלמידים ילמדו מושגים חשובים במתמטיקה מודרנית כמו תבניות מודולריות ושריגים

דרישות נוכחות (%) :

85

שיטת ההוראה בקורס: הוראה פרונטלית שעתים בשבוע, שיחה חופשית שעה

רשימת נושאים / תכנית הלימודים בקורס:

The problems I hope to discuss are the following:

1. ***The Riemann hypothesis***. Probably the most famous problem in mathematics, and by a wide margin ($P \approx NP$ is arguably as famous, and possibly of more practical importance, but is somewhere between theoretical computer science and mathematics). For such a famous problem, it takes some amount of efforts to state (the usual definition of the Riemann zeta function makes sense only for $\text{Re } s > 1$!), and it is even harder to explain why it is important. I will pursue a somewhat

nonstandard (or at least not standard for presentation of the Riemann hypothesis from an elementary point of view) emphasizing the connection between the Riemann hypothesis and the quotient of the hyperbolic plane $H \cong \{z: \text{Im } z > 0\}$ by the group $SL(2, \mathbb{Z})$ acting on H by Mobius transformations. Some references we will use include [Titchmarsh-book, Zagier-Eisenstein-and-Riemann, Zagier-short-proof]

1. **The Littlewood conjecture**. This conjecture states that for every α, η in $\mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \sin(n\alpha) \sin(n\eta) > 0.$$
This is a problem I worked on myself [Einsiedler-Katok-Lindenstrauss], though we will mostly discuss a much older paper [Cassels-Swinnerton-Dyer] that aged very well!

1. **The Kakeya conjecture**. This conjecture states that for any (say) compact subset of $\mathbb{R}^d$ which contain a unit segment of a line in every direction has to have Hausdorff dimension $\geq d$. This conjecture is known for $d \leq 2$; moreover it is easy to see that for any d such a set has to have dimension $\geq -1 + \frac{d-1}{2}$. There are stronger bounds for every $d \geq 3$ (see e.g. [Wolff Kakeya]). One can ask an analogous problem also over a finite field. To the surprise of many, the question of a finite fields has a complete solution by Dvir [Dvir Kakeya].

חומר חובה לקריאה:

יתכן שינתנו מטלות קריאה חובה תוך כדי הסמסטר

חומר לקריאה נוספת:

Bibliography

1. Titchmarsh, E.C.: The theory of the Riemann zeta-function. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1986)
2. Zagier, D.: Eisenstein series and the Riemann zeta function. In: Automorphic forms, representation theory and arithmetic (Bombay, 1979). pp. 275–301. Springer, Berlin-New York (1981)
3. Zagier, D.: Newman's short proof of the prime number theorem. Amer. Math. Monthly. 104, 705–708 (1997). <https://doi.org/10.2307/2975232>
4. Einsiedler, M., Katok, A., Lindenstrauss, E.: Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture. Ann. of Math. (2). 164, 513–560 (2006)
5. Cassels, J.W.S., Swinnerton-Dyer, H.P.F.: On the product of three homogeneous

linear forms and the indefinite ternary quadratic forms. *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 248, 73–96 (1955)

6. Wolff, T.: Recent work connected with the Kakeya problem. In: *Prospects in mathematics* (Princeton, NJ, 1996). pp. 129–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999)

7. Dvir, Z.: On the size of kakeya sets in finite fields. *Journal of the American Mathematical Society.* 22, 1093–1097 (2009)

מרכיבי הציון הסופי :

הגשת עבודה מסכמת / פרויקט גמר / מטלת סיכום / מבחן בית / רפרט 100 %

מידע נוסף / הערות:

ינתנו תרגילים תוך כדי השנה שלא יבדקו, חלקם יכללו במבחן הבית שינתן בסוף הסמסטר